



Китайский Виктор Анатольевич

## ДЕЛО О КОРОЛЕВСКОМ ПУДИНГЕ (решение задачи)

### ВВЕДЕНИЕ

В решении задачи нам поможет алгебра высказываний.

В алгебре высказываний элементами являются высказывания, например:

$A$  = “Москва – столица России”,

$B$  = “ $2 \times 2 = 5$ ”

При рассмотрении высказываний нас будет интересовать, является ли данное высказывание истинным или ложным.

Так,  $A = 1$ , означает, что  $A$  – истина, то есть МОСКВА – столица России.

$B = 0$ , означает, что  $B$  – ложь, то есть  $2 \times 2$  не равно 5.

Таким образом, любое высказывание (событие) может принимать одно из двух значений: 0 или 1.

### ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Пусть  $X_1, X_2$  – высказывания.

#### 1. Логическое умножение (конъюнкция)

Обозначение:  $X_1$  И  $X_2$  (другие обозначения:  $X_1$  AND  $X_2$ ;  $X_1 X_2$ ;  $X_1 \wedge X_2$ ).

Высказывание  $X_1 X_2$  истинно тогда и только тогда, когда *оба* высказывания истинны.

Таблица истинности для логического умножения:

$X_1$	0	0	1	1
$X_2$	0	1	0	1
$X_1 X_2$	0	0	0	1

#### 2. Логическая сумма (дизъюнкция)

Обозначение:  $X_1$  ИЛИ  $X_2$  (другие обозначения:  $X_1$  OR  $X_2$ ;  $X_1 \vee X_2$ ).

Высказывание  $X_1$  ИЛИ  $X_2$  истинно тогда и только тогда, когда *хотя бы одно* из высказываний истинно.

Таблица истинности для логического сложения:

$X_1$	0	0	1	1
$X_2$	0	1	0	1
$X_1$ ИЛИ $X_2$	0	1	1	1

#### 3. Отрицание высказывания (инверсия)

Обозначение: НЕ  $X_1$  (другое обозначение:  $\neg X_1$ ).

Высказывание НЕ  $X_1$  истинно тогда и только тогда, когда высказывание  $X_1$  ложно.

Таблица истинности для инверсии:

$X_1$	0	1
НЕ $X_1$	1	0

#### 4. Эквиваленция

Обозначение:  $X_1 \equiv X_2$  ( $X_1$  эквивалентно  $X_2$ ).

Высказывание  $X_1 \equiv X_2$  истинно тогда и только тогда, когда *оба* высказывания истинны, либо – *оба* ложны:

$X_1 \equiv X_2 = [(X_1 X_2) \text{ ИЛИ } (\text{НЕ } X_1 \text{ НЕ } X_2)]$ .

Таблица истинности для эквиваленции:

$X_1$	0	0	1	1
$X_2$	0	1	0	1
$X_1 \equiv X_2$	1	0	0	1

Упражнение 1. Покажите (это очень важно!), что  $\text{НЕ } (X_1 \equiv X_2) = (X_1 \equiv \text{НЕ } X_2)$ .

**5. Логическое следование (импликация)**

Обозначение: **ЕСЛИ  $X_1$ , ТО  $X_2$**  (другие обозначения:  $X_1 \Rightarrow X_2$ ; **IF  $X_1$ , THEN  $X_2$** ).

Высказывание (**ЕСЛИ  $X_1$ , ТО  $X_2$** ) истинно для всех высказываний, кроме  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 0$ .

Таблица истинности для импликации:

$X_1$	0	0	1	1
$X_2$	0	1	0	1
<b>ЕСЛИ <math>X_1</math>, ТО <math>X_2</math></b>	1	1	0	1

Упражнение 2. Покажите (это очень важно!), что

$$(\text{ЕСЛИ } X_1, \text{ ТО } X_2) \equiv (\text{НЕ } X_1 \text{ ИЛИ } X_2).$$

**РАЗБОР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ**

Используя операции алгебры высказываний и приведенные условия составим логические выражения для данной задачи.

Составим таблицу истинности (табл. 1).

*Показания (ответы на вопросы Суда) подсудимых* обозначены символами **A, B, C, D** и могут принимать два логических значения: если ответ “ДА”, то 1; если ответ “НЕТ”, то 0.

*Виновность* подсудимых обозначена символами **I, J, K, M**, которые также могут принимать два логических значения: если “Виновен”, то 1; если “Не виновен”, то 0.

*Истинность показаний* обозначена символами  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , которые также могут принимать два значения: если показание истинно, то 1; если показание ложно, то 0.

*Количество ответов “ДА”* обозначено переменной  $yes \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ :

$$yes = A + B + C + D.$$

*Условие единственности виновного:*

$$k_0 = I + J + K + M = 1.$$

*Условие истинности показаний двух подсудимых:*  $k_1 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 2$ .

**Разбор показания Труляля**

$F_{11}$  = если Труляля сказал правду, то он (“Виновен” и ответил “ДА”) или (“Не виновен” и ответил “НЕТ”).

$F_{12}$  = если Труляля солгал, то он (“Виновен” и ответил “НЕТ”) или (“Не виновен” и ответил “ДА”).

Это не что иное как эквивалентность  $X_1$  и  $(A \equiv I)$ .

Искомое логическое выражение для показания Труляля следующее:

$$X_1 \equiv (A \equiv I) = 1.$$

Построим таблицу истинности  $F_1$ :

A	I	$X_1$	$A \equiv I$	$X_1 \equiv (A \equiv I)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Аналогично составляются логические выражения для показаний Ворона и Кухарки

$$X_3 \equiv (C \equiv MX_1),$$

$$X_4 \equiv (D \equiv JX_2).$$

Что касается показания Траляля, то мы лишь знаем (День 1-ый), что его спросили либо об *истинности* показания Труляля (вопрос 1), либо о *виновности* Кухарки (вопрос 2).

Таким образом, к полученным логическим выражениям необходимо добавить логическое выражение, следующее либо из 1-ого вопроса, либо из 2-ого вопроса.

Мы пока не знаем о чем спросили Траляля, поэтому необходимо решить две системы логических уравнений (\*) и (\*\*), исходя из условий, что *виновен лишь 1 (один) обвиняемый*  $X_2 \equiv (B \equiv X_1)$  и что *правду сказали два подсудимых*  $X_2 \equiv (B \equiv M)$ .

Табл. 1. Таблица истинности

	Ответил “ДА”	Виновность	Истинность показания
Труляля	<b>A</b>	<b>I</b>	$X_1$
Траляля	<b>B</b>	<b>J</b>	$X_2$
Ворон	<b>C</b>	<b>K</b>	$X_3$
Кухарка	<b>D</b>	<b>M</b>	$X_4$

Ко всему прочему нам необходимо считать количество ответов “ДА” для каждого набора переменных

(**A, B, C, D, I, J, K, M, X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>, X<sub>4</sub>**)!

Решение систем (\*) и (\*\*) позволяет нам построить итоговую таблицу истинности.

Естественно, что труд по построению таблицы истинности необходимо переложить «на плечи» компьютера!

**Основные уравнения**

		Система *		Система **
<b>F<sub>1</sub></b>		<b>X<sub>1</sub> ≡ (A ≡ I)</b>		<b>X<sub>1</sub> ≡ (A ≡ I)</b>
	<b>F<sub>21</sub></b>	<b>X<sub>2</sub> ≡ (B ≡ X<sub>1</sub>)</b>	<b>F<sub>22</sub></b>	<b>X<sub>2</sub> ≡ (B ≡ M)</b>
<b>F<sub>3</sub></b>		<b>X<sub>3</sub> ≡ (C ≡ MX<sub>1</sub>)</b>		<b>X<sub>3</sub> ≡ (C ≡ MX<sub>1</sub>)</b>
<b>F<sub>4</sub></b>		<b>X<sub>4</sub> ≡ (D ≡ JX<sub>2</sub>)</b>		<b>X<sub>4</sub> ≡ (D ≡ JX<sub>2</sub>)</b>

**Отбраковка вариантов**

Две полученные таблицы истинности содержат по 24 набора решений

(**A, B, C, D, I, J, K, M, X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>, X<sub>4</sub>**) (Проверьте! Таблицы не приведены из-за их громоздкости).

Анализ таблиц истинности приведен в Табл. 2.

Из нее видно, что для некоторых наборов (**A, B, C, D**) системы имеют по 2 и даже

3 решения, с другой стороны, в некоторых случаях, не имеют решения.

Кроме того, для двух наборов (варианты 12 и 16) и та и другая система имеют единственное решение.

Нам известно, что СУД определил виновного, значит, ему был известен один из наборов (**A, B, C, D**), при которых система (или обе системы) имеют *единственное* решение.

**День 1-ый.** Вопрос Черепахи Квази: «Правда ли, что, по крайней мере, один из братьев ответил “НЕТ”?» можно перефразировать так: «Годится ли вариант № 1?». Нет, не годится (иначе ЧК удалось бы определить виновного). Вычёркиваем этот вариант и переходим к рассмотрению оставшихся вариантов.

Последовательность действий, анализируемых в соответствии с сюжетом задачи, следующая:

Кухарка и Ворон только в варианте № 12 оба сказали правду.

**День 3-ий.** Труляля и Ворон только в варианте № 13 оба сказали правду.

**Табл. 2.** Количество возможных вариантов виновности одного из подсудимых для каждой комбинации (**A, B, C, D**) с учётом выполнения условий  $k_0 = 1$  и  $k_1 = 2$

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>A</b>	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>B</b>	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
<b>C</b>	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
<b>D</b>	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Система *	1	–	–	3	1	3	3	1	1	1	1	1	1	3	3	1
Система **	–	2	2	2	2	1	1	2	–	2	3	1	2	2	1	1

**Табл. 3.** Что могло быть известно Суду

№	A	B	C	D	yes	Виновен	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	система	день
<b>1</b>	1	1	1	1	4	<b>I</b>	1	1	0	0	*	<b>1</b>
<b>5</b>	1	0	1	1	3	<b>J</b>	0	1	0	1	*	<b>7</b>
<b>6</b>	1	0	1	0	2	<b>K</b>	0	1	0	1	**	<b>8</b>
<b>7</b>	1	0	0	1	2	<b>K</b>	0	1	1	0	**	
<b>8</b>	1	0	0	0	1	<b>J</b>	0	1	1	0	*	
<b>9</b>	0	1	1	1	3	<b>K</b>	1	1	0	0	*	<b>6</b>
<b>10</b>	0	1	1	0	2	<b>J</b>	1	1	0	0	*	<b>5</b>
<b>11</b>	0	1	0	1	2	<b>M</b>	1	1	0	0	*	<b>11</b>
<b>12</b>	0	1	0	0	1	<b>I</b>	0	0	1	1	*, **	<b>2</b>
<b>13</b>	0	0	1	1	2	<b>M</b>	1	0	1	0	*	<b>3</b>
<b>15</b>	0	0	0	1	1	<b>I</b>	0	1	1	0	**	<b>9</b>
<b>16</b>	0	0	0	0	0	<b>M</b>	1	0	0	1	*, **	<b>4</b>

**День 4-ый.** Герцогиня могла интересоваться истинностью показания только Траляля (проверьте!). Только в варианте № 16 Траляля солгал.

**День 5-ый.** Только в варианте № 10 Труляля и возможный виновный (Траляля) оба сказали правду!

**День 6-ой.** Белый Рыцарь не мог сообщить Моржу, что Труляля был единственным из подсудимых, ответившим “НЕТ”, иначе Морж решил бы задачу (см. вариант № 9).

**День 7-ой.** Только в варианте № 5 трое подсудимых ответили “ДА” (в остальных вариантах либо двое: 6, 7, 11, либо один: 8, 15).

**День 8-ой.** Лишь в варианте № 6 Кухарка дала правдивое показание.

**День 9-ый.** Лишь в варианте № 15 возможный виновный (Труляля) ответил “НЕТ” и солгал.

**День 10-ый.** Грифон не мог (проверьте!) интересоваться ответом Ворона!

**День 11-ый.** Смотри табл. 4 (!!!), так как записи с 7-ого по 10-ый день включительно утеряны. Болванщик мог интересоваться ответом только Траляля (проверьте!). Лишь в варианте №11 Траляля ответил “ДА”! Таким образом вариант №11 из таблицы 4 убираем. Остаются варианты 7 и 8.

**День 12-ый.** Алиса выяснила у Белого Рыцаря, кем интересовался Грифон! Если бы Грифона интересовали показания Труляля или Траляля, то Алиса не смогла бы определить виновного, значит, его интересовали показания Кухарки, а она не могла ответить “НЕТ”, иначе Грифон назвал бы имя похитителя! Значит, она ответила “ДА”.

Таким образом, Траляля на суде был задан вопрос *о виновности Кухарки*, а виновен в похищении Пудинга – **ВОРОН** (см. вариант № 7)!

Табл. 4. Начало 7-ого и 11-ого дней

№	A	B	C	D	yes	Виновен	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	Система	День
5	1	0	1	1	3	J	0	1	0	1	*	7
6	1	0	1	0	2	K	0	1	0	1	**	8
7	1	0	0	1	2	K	0	1	1	0	*	
8	1	0	0	0	1	J	0	1	1	0	**	
11	0	1	0	1	2	M	1	1	0	0	*	11
15	0	0	0	1	1	I	0	1	1	0	**	9

Табл. 5. Начало 10-ого дня

№	a	b	c	d	Yes	Виновен	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	Система	День
7	1	0	0	1	2	k	0	1	1	0	2	
8	1	0	0	0	1	j	0	1	1	0	1	
11	0	1	0	1	2	m	1	1	0	0	1	11

### Литература

1. Цинман Л.Л. Логические задачи и алгебра высказываний // КВАНТ, 1971. № 4.
2. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.
3. Смаллиан Р. Алиса в Стране Смекалки. М.: Мир, 1987.
4. Китайский В.А. Самое запутанное дело-2 // КВАНТ, 2007. № 1.

Китайский Виктор Анатольевич,  
инженер ООО «НПЦ ПРИОРИТЕТ».



Наши авторы, 2013.  
Our authors, 2013.